

Examen HAVO 2010

tijdvak 1
dinsdag 18 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Dit examen bestaat uit 23 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Een tenniswedstrijd

De finale in het herenenkelspel van het tennistoernooi Australian Open van 2007 ging tussen de tennissers Roger Federer en Fernando Gonzalez. Roger Federer won. Hij speelde al negen keer eerder tegen Fernando Gonzalez en al die wedstrijden won hij.

Wanneer twee spelers met hetzelfde krachtsverschil als Federer en Gonzalez tegen elkaar spelen, is de kans dat de sterkste de wedstrijd wint, gelijk aan 0,94. We bekijken 10 van dergelijke wedstrijden.

- 3p 1 Bereken de kans dat de sterkste speler in die 10 wedstrijden 10 keer van de andere speler wint.

Voor het vervolg van de opgave is het nodig enkele begrippen vast te leggen.

Bij tennis wordt een bal met een racket over een net gespeeld. Bij een wedstrijd moet de bal binnen de speelhelft van de tegenstander worden geslagen. De speler die in een slagenwisseling als laatste een geldige slag doet, krijgt een punt.

De bal wordt in het spel gebracht met een **service**. De speler die dat mag doen, heeft de **servicebeurt**. De speler mag een mislukte service éénmaal overdoen. Bij een tweede mislukte service is de servicebeurt voorbij en gaat het punt naar de tegenstander.

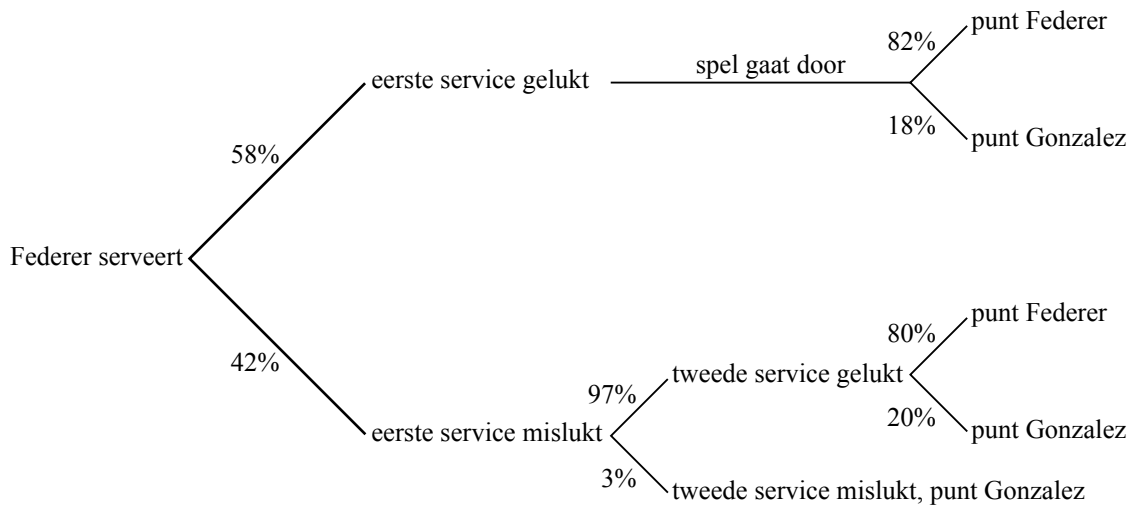
Na afloop stonden op teletekst de statistieken van de wedstrijd. In de tabel is een gedeelte daarvan opgenomen.

tabel

	Federer	Gonzalez
Totaal aantal servicebeurten	86	127
Aantal eerste services gelukt	50	77
Wint punt nadat eerste service gelukt is	82%	69%
Aantal tweede services gelukt	35	47
Wint punt nadat tweede service gelukt is	80%	49%

We kijken naar de servicebeurten van Federer. In de figuur zijn die schematisch weergegeven. Hierin staan ook percentages die niet in de tabel staan, maar er wel uit zijn af te leiden. De percentages in de figuur en in de tabel zijn afgerond.

figuur



4p **2** Leg uit hoe de percentages 42% en 97% in de figuur kunnen worden afgeleid uit de tabel.

3p **3** Bereken de kans dat Federer het punt wint als hij zelf serveert.

Federer krijgt negen servicebeurten achter elkaar. We kijken naar het mislukken van de eerste service.

4p **4** Bereken uitgaande van het schema in de figuur de kans dat in deze negen servicebeurten vijf keer of meer de eerste service mislukt.

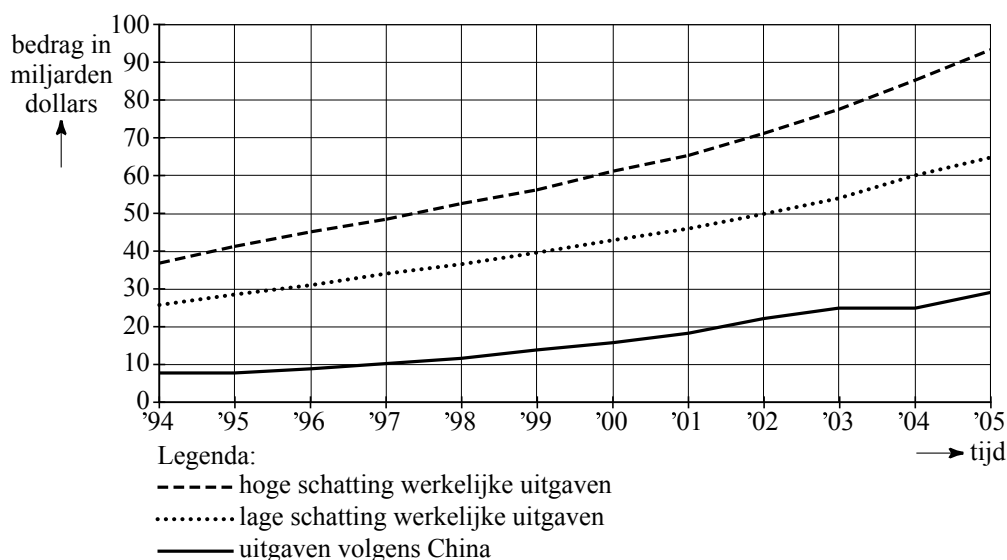
Ook voor een servicebeurt van Gonzalez is uit de gegevens van de tabel een schema af te leiden.

6p **5** Maak voor de situatie dat Gonzalez serveert een vergelijkbaar schema als in de figuur en bereken daarmee de kans dat Federer het punt wint in de servicebeurt van Gonzalez.

China's defensie-uitgaven

China ontwikkelt zich in hoog tempo tot grootmacht, ook op het militaire vlak. Het Pentagon, het Amerikaanse Ministerie van Defensie, houdt de Chinese defensie-uitgaven nauwlettend in de gaten. In figuur 1 staan de Chinese defensie-uitgaven volgens China zelf en volgens twee schattingen van het Pentagon, een hoge en een lage. Duidelijk is te zien dat het Pentagon uitgaat van veel hogere defensie-uitgaven dan China opgeeft.

figuur 1



In figuur 1 is te zien dat de hoge schatting van de uitgaven vanaf 1994 tot 1999 (nagenoeg) lineair toenam van 37 miljard dollar tot 56 miljard dollar. Stel dat deze lineaire toename ook na 1999 was doorgegaan.

- 3p **6** Bereken hoe groot de hoge schatting van de uitgaven dan in 2003 zou zijn geweest.

Volgens het Pentagon namen de defensie-uitgaven in de periode van 2001 tot 2005 exponentieel toe. De hoge schatting steeg van 65 miljard dollar in 2001 tot 93 miljard dollar in 2005.

- 4p **7** Bereken het jaarlijkse groeipercentage dat het Pentagon als uitgangspunt nam voor de hoge schatting (in deze periode). Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

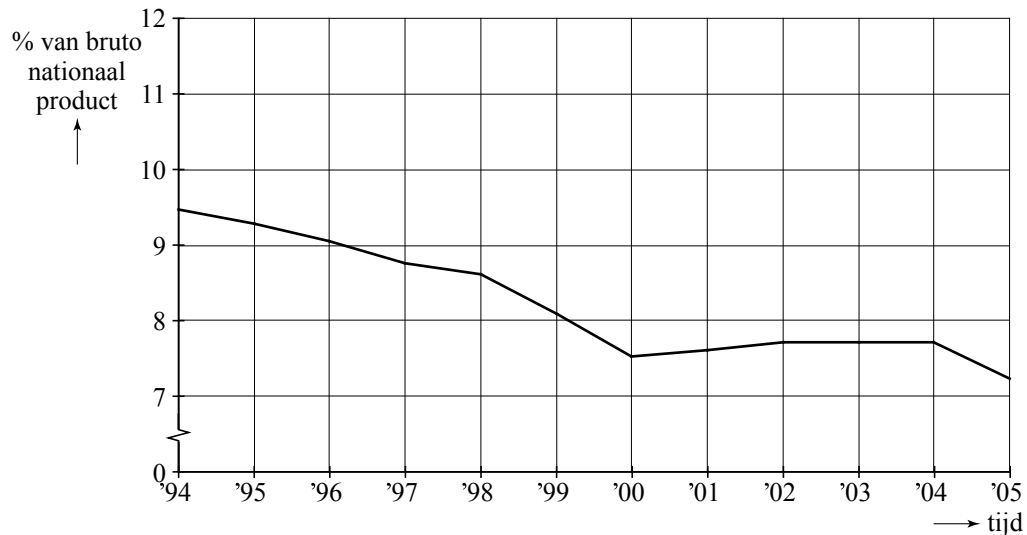
In 2005 was de lage schatting 65 miljard dollar en de hoge 93 miljard dollar, een verschil van 28 miljard dollar.

Voor de jaren na 2005 voorspelde het Pentagon dat de defensie-uitgaven exponentieel zouden blijven toenemen. Voor de lage schatting (in deze periode) ging het Pentagon uit van een jaarlijkse groei van 8,5% en voor de hoge schatting van 9,5%.

- 5p **8** Bereken in welk jaar het verschil tussen de lage en de hoge schatting voor het eerst meer dan 50 miljard dollar zal zijn.

Volgens de Chinezen zelf valt het allemaal wel mee. Ze geven toe dat hun defensie-uitgaven jaarlijks stijgen: van 8 miljard dollar in 1994 tot 29 miljard dollar in 2005. Maar zij wijzen erop dat de defensie-uitgaven als percentage van het bruto nationaal product, het bnp, sinds 1994 vrijwel steeds gedaald zijn. Zie figuur 2.

figuur 2 Defensie-uitgaven als percentage van het bnp



Dat een stijging van de defensie-uitgaven toch als een daling kan worden gepresenteerd, komt doordat de economie in China razendsnel groeit en het bnp dus ook.

Met behulp van bovenstaande gegevens en figuur 2 is voor 1994 en 2005 het bnp van China te berekenen.

- 5p **9** Bereken met hoeveel procent het bnp van China in 2005 gestegen is ten opzichte van 1994.

Gastransport

In ons land wordt heel veel aardgas verbruikt, onder andere voor het verwarmen van huizen en andere gebouwen.

Bij koud weer wordt er meer gas verbruikt dan bij warm weer.

Als het zeer koud is, kan het voorkomen dat er zoveel gas wordt gevraagd, dat het gasleidingnetwerk die hoeveelheid niet meer kan transporteren doordat de leidingen niet voldoende groot zijn. De maximale capaciteit van het netwerk is dan bereikt; er kan niet voldoende gas worden geleverd.

foto



Een gasleverancier heeft onderzocht hoe de hoeveelheid te leveren gas afhangt van de buitentemperatuur.

Uit dat onderzoek blijkt dat er altijd een vaste hoeveelheid gas gebruikt wordt voor koken, douchen en dergelijke. Deze constante hoeveelheid is 5,5% van de maximale capaciteit van het netwerk (het constante deel).

De hoeveelheid gas die wordt gebruikt voor het verwarmen van huizen en andere gebouwen, is afhankelijk van de buitentemperatuur (het temperatuurafhankelijke deel).

In deze opgave bekijken we het percentage van de maximale capaciteit van het netwerk dat gebruikt wordt voor het gastransport. Dit percentage P wordt gegeven door de volgende formule. Hierin is T de buitentemperatuur in $^{\circ}\text{C}$.

$$P = 5,5 + \frac{18 - T}{30} \cdot 94,5$$

De formule is niet meer bruikbaar boven een bepaalde buitentemperatuur, omdat het percentage altijd minstens 5,5 is.

3p **10** Bereken deze buitentemperatuur.

De formule is ook niet bruikbaar voor lagere temperaturen dan $T = -12$ $^{\circ}\text{C}$.

3p **11** Toon dit met behulp van de formule aan.

De gasleverancier komt dus in de problemen op dagen dat de buitentemperatuur lager is dan $-12\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Volgens het KNMI gebeurt dat niet vaak. Zij hebben elk jaar op alle 90 dagen van de winterperiode de temperatuur gemeten. Uit hun gegevens blijkt dat in de afgelopen 100 jaar in totaal op slechts 21 dagen de buitentemperatuur lager was dan $-12\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Hiermee kunnen we de kans schatten dat op een willekeurige dag in de winterperiode de buitentemperatuur lager is dan $-12\text{ }^{\circ}\text{C}$.

2p **12** Schat deze kans door middel van een berekening.

De formule voor P kun je herleiden tot de bekende vorm:

$$P = a \cdot T + b$$

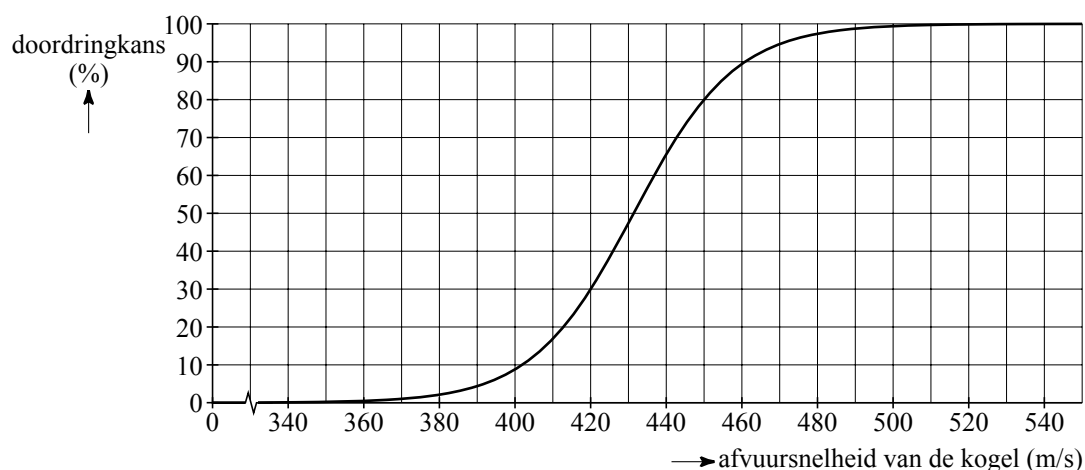
3p **13** Bereken a en b .

Kogelwerende vesten

Militairen en leden van arrestatieteams dragen soms kogelwerende vesten. Deze vesten moeten zo goed mogelijk kogels opvangen zonder dat de drager verwondingen oploopt, maar ze mogen niet zo zwaar en stug zijn dat de drager daardoor belemmerd wordt in zijn bewegingen. Deze vesten worden gemaakt van kunststoffen.

Om kogelwerende vesten van een bepaalde kunststof te testen, worden er kogels op afgevuurd met verschillende snelheden. Men kijkt of de kogel door het vest is gedrongen. De testresultaten zijn verwerkt in de figuur.

figuur



In de figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat van de kogels met een afvuursnelheid van 450 m/s er 80% door het vest heen gaan. Je kunt ook zeggen: “Wanneer een kogel afgevuurd wordt met een snelheid van 450 m/s is de kans 0,8 dat die door het vest heen gaat.”

Een arrestatieteam overweegt de aanschaf van deze vesten. In een test worden series van vijf schoten op een vest afgevuurd. De afvuursnelheid van de kogels is 420 m/s.

De kans dat er in een serie van vijf schoten geen enkele kogel door het vest dringt, is ongeveer 0,17.

4p **14** Toon dat met een berekening aan.

In elke serie is de kans dus 0,17 dat er geen enkele kogel door het vest dringt. De test bestaat uit acht series.

3p **15** Bereken de kans dat er in drie van de acht series geen enkele kogel door het vest dringt.

Om verschillende typen kogelwerende vesten te vergelijken, kijkt men naar de V_{50} . Dit is de afvuursnelheid van kogels waarbij 50% van de kogels door het vest heen dringt.

- 2p **16** Is een vest met een hogere V_{50} beter of slechter? Licht je antwoord toe.

Bij het testen van de kogelwerende vesten gebruikt men een speciaal hiervoor ontwikkeld vuurwapen, waarbij men de afvuursnelheid kan instellen.

Als men de afvuursnelheid instelt op 350 m/s dan blijkt de werkelijke afvuursnelheid van de kogels bij benadering normaal verdeeld te zijn met een gemiddelde van 350 m/s en een standaardafwijking van 5,8 m/s.

- 3p **17** Bereken hoeveel procent van de kogels bij deze instelling een afvuursnelheid heeft van meer dan 360 m/s.

Naarmate de afvuursnelheid hoger wordt ingesteld, blijkt de spreiding van de werkelijke afvuursnelheid van de kogels groter te worden.

Bij het instellen van een afvuursnelheid van 490 m/s is de werkelijke afvuursnelheid van de kogels bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 490 m/s. Verder heeft 90% van de kogels een afvuursnelheid tussen de 480 en 500 m/s.

- 4p **18** Bereken de standaardafwijking van de afvuursnelheid bij deze instelling. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Brandstofverbruik

Vliegen kost veel brandstof. Een flink deel van de totale kosten van een vlucht bestaat uit brandstofkosten. Voor vliegmaatschappijen is het dus interessant om zuinige vliegtuigen te gebruiken.

Om het brandstofverbruik van verschillende typen vliegtuigen te kunnen vergelijken, kijkt men naar het brandstofverbruik per kilometer per passagier. Men gaat er daarbij van uit dat alle plaatsen (stoelen) in het vliegtuig bezet zijn. Dit brandstofverbruik per kilometer per passagier wordt **brandstofverbruik per skm** (stoelkilometer) genoemd en wordt uitgedrukt in gram.

Een vliegtuig met 210 stoelen heeft voor een vlucht van 4500 km 26 325 kg brandstof verbruikt.

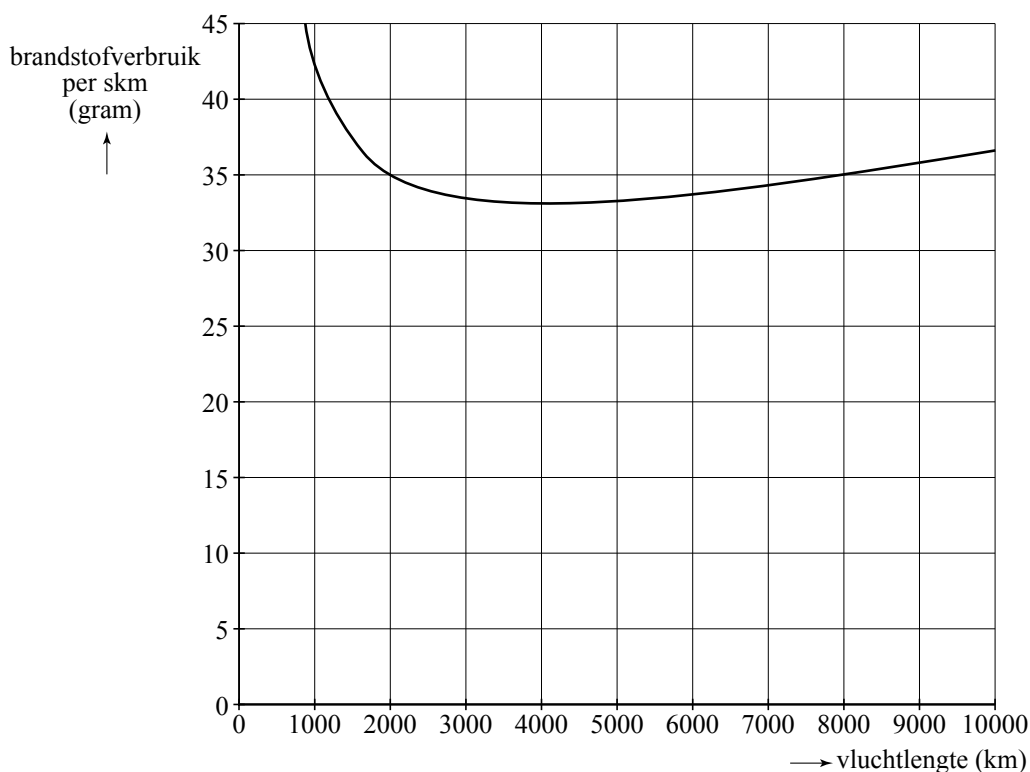
- 3p **19** Ga met een berekening na dat het brandstofverbruik per skm voor dit vliegtuig tijdens deze vlucht bijna 28 gram is.

Ook kan men brandstof besparen door zo weinig mogelijk brandstof voor de vlucht mee te nemen. Als bij een vliegtuig de brandstoftanks helemaal vol zijn, gebruikt het vliegtuig veel meer brandstof dan wanneer de tanks halfvol zijn. Het vliegtuig is dan immers veel zwaarder.

Een vliegtuig neemt dan ook altijd precies de hoeveelheid brandstof mee die voldoende is voor de lengte van de vlucht.

In de figuur is voor een bepaald type vliegtuig het brandstofverbruik per skm uitgezet tegen de vluchtlengte in km.

figuur



In het vervolg van deze opgave gaan we uit van het type vliegtuig uit de figuur. Dit type heeft 524 stoelen aan boord.

Het vliegtuig begint aan een vlucht van 9000 km.

- 4p **20** Bereken hoeveel kg brandstof dit vliegtuig meeneemt voor deze vlucht.

Wanneer er mogelijkheden zijn voor een tussenlanding kan dat voordelig zijn, want voor kortere vluchten is het brandstofverbruik per skm lager doordat er minder brandstof meegenomen hoeft te worden.

Bij de vlucht van 9000 km zou bijvoorbeeld na elke 3000 km een tussenlanding gemaakt kunnen worden. Als de vliegmaatschappij daartoe besluit, hoeft het vliegtuig bij elk vertrek maar voor 3000 km aan brandstof mee te nemen.

- 4p **21** Bereken hoeveel procent het vliegtuig op deze manier aan brandstof per skm kan besparen.

Voor het vliegtuig kan het verband tussen het brandstofverbruik en de vluchtlengte worden uitgedrukt in de volgende formule:

$$B = \frac{0,001 \cdot L^2 + 25 \cdot L + 16500}{L}$$

Hierin is B het brandstofverbruik per skm in gram en L de vluchtlengte in km.

- 4p **22** Bereken met de formule voor welke vluchtlengtes het brandstofverbruik per skm 38 gram is.

Een vliegmaatschappij die veel lange afstanden vliegt met dit type vliegtuig, wil natuurlijk weten hoe groot de optimale vluchtlengte is. De optimale vluchtlengte is de vluchtlengte waarbij het brandstofverbruik per skm minimaal is.

- 3p **23** Onderzoek met de GR hoe groot de optimale vluchtlengte is.