wiskunde B1 (nieuwe stijl)

Examen VWO

Voorbereidend
Wetenschappelijk
Onderwijs

20 **04**

Tijdvak 2
Woensdag 23 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 87 punten te behalen; het examen bestaat uit 18 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

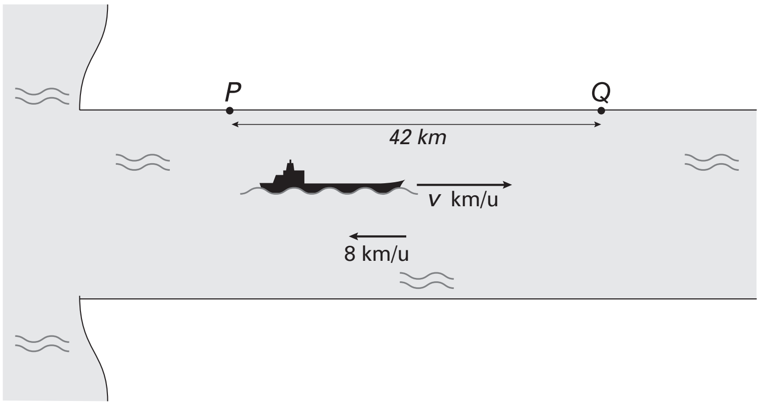
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Brandstofverbruik

Een schip maakt een tocht over een rivier van P naar Q en terug. De afstand tussen P en Q is 42 km. Van P naar Q vaart het schip tegen de stroom in (stroomopwaarts); op de terugreis vaart het met de stroom mee (stroomafwaarts).
De snelheid van het schip ten opzichte van de wal hangt af van de stroomsnelheid van het water en van de snelheid v van het schip ten opzichte van het water; hierbij is v in km/u.
De stroomsnelheid van het water is 8 km/u. Zie figuur 1, waarin de tocht van P naar Q is weergegeven.

figuur 1



Veronderstel: $v = 20$.

5p **1** ☐ Toon aan dat de tocht van P naar Q en terug dan 5 uur duurt.

Het brandstofverbruik B op het deel van de tocht stroomopwaarts hangt af van de vaartijd T (in uren) en van de snelheid v (in km/u) van het schip ten opzichte van het water.
Er geldt: $B = T \cdot v^3$.

Voor het deel van de tocht stroomopwaarts geldt: $B = \dfrac{42v^3}{v-8}$.

3p **2** ☐ Toon deze laatste formule aan.

7p **3** ☐ Bereken algebraïsch bij welke waarde van v het brandstofverbruik minimaal is voor het deel van de tocht stroomopwaarts.

Spreekuur

Een huisarts heeft op elke werkdag twee uren gereserveerd voor een spreekuur. De ervaring heeft haar geleerd dat zij tijdens het spreekuur gemiddeld tien minuten voor een patiënt nodig heeft.
De huisarts deelt de patiënten die van haar spreekuur gebruik maken in drie groepen in:
- *gemakkelijke* patiënten die hoogstens 5 minuten tijd kosten;
- *gewone* patiënten die tussen de 5 en 15 minuten tijd kosten;
- *tijdrovende* patiënten die minstens 15 minuten tijd kosten.

We maken bij deze situatie het volgende wiskundige model:
- elke werkdag komen er 12 patiënten op het spreekuur;
- de tijd die de huisarts tijdens het spreekuur voor een patiënt nodig heeft, is normaal verdeeld met een gemiddelde van 10 minuten en een standaardafwijking van 4 minuten.

4p **4** ☐ Bereken de verwachtingswaarde van het aantal *tijdrovende* patiënten tijdens een spreekuur in twee decimalen nauwkeurig.

5p **5** ☐ Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat de huisarts tijdens een spreekuur 2 *gemakkelijke* en 10 *gewone* patiënten krijgt.

5p **6** ☐ Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat tijdens een spreekuur minstens zes patiënten meer dan 10 minuten kosten.

Neem aan dat de totale tijd die de arts voor 60 patiënten nodig heeft normaal verdeeld is met een gemiddelde van 600 minuten en een standaardafwijking van $4\sqrt{60}$ minuten.
In een week had de arts voor de 60 patiënten op haar spreekuur in totaal 654 minuten nodig. Dat is aanzienlijk meer dan de 600 minuten die je zou verwachten.

5p **7** ☐ Onderzoek of deze gegevens voldoende aanleiding geven om de veronderstelde gemiddelde tijd van 10 minuten te verhogen, bij een significantieniveau van 5%.

De huisarts beweert dat zij de afgelopen vijf jaar van haar ruim 3000 patiënten 30% wel eens een keer doorverwezen heeft naar een specialist in het ziekenhuis.
Haar plaatsvervanger (tijdens een vakantie) denkt dat dit percentage minder is en neemt een steekproef van 50 patiënten.

4p **8** ☐ Bereken de kans dat de plaatsvervanger in deze steekproef minder dan 10 doorverwezen patiënten vindt, als de huisarts gelijk heeft.

Voedselbehoefte

In een zeker gebied wordt een grote toename van de bevolking voorzien. Om de daarmee gepaard gaande problemen het hoofd te kunnen bieden, heeft men een schatting nodig van de grootte van de bevolking voor de komende jaren. Daarvoor stelt men het volgende model op voor de grootte van de bevolking: $B(t) = 228 \cdot \mathrm{e}^{0,1t}$.

Hierin is B het aantal mensen in duizenden en is t de tijd in jaren. Het komende jaar loopt van $t = 0$ tot $t = 1$. In deze opgave werken we met jaren van 360 dagen en maanden van 30 dagen.

4p **9** ☐ Bereken de procentuele toename van de bevolking per maand.

Voedseldeskundigen hanteren als vuistregel: *per persoon is er per dag 0,4 kg vast voedsel nodig*.
De totale benodigde hoeveelheid vast voedsel voor de inwoners van het gebied in het komende jaar noemen we V (in kg).
Iemand wil berekenen hoe groot V is.

Hij gebruikt daartoe eerst een benaderingsmethode. Hij bepaalt het gemiddelde van de groottes van de bevolking op de tijdstippen $t = 0$ en $t = 1$. Hij gaat ervan uit dat de bevolkingsomvang het gehele jaar gelijk is aan dit gemiddelde.

3p **10** ☐ Bereken V volgens deze methode.

Een nauwkeuriger schatting van V kan verkregen worden door voor iedere dag van het jaar de voedselbehoefte te berekenen en deze voedselbehoeften op te tellen.

5p **11** ☐ Bereken V volgens deze tweede methode.

Een derde methode om V te berekenen is met behulp van een integraal.

4p **12** ☐ Bereken V met behulp van primitiveren volgens deze derde methode.

De wijzers van een uurwerk

We volgen de eindpunten van de wijzers van een uurwerk. Daartoe brengen we een assenstelsel aan met de oorsprong in het draaipunt van de wijzers, de positieve x-as door "3 uur", de positieve y-as door "12 uur" en met de cm als eenheid. We rekenen de tijd t in uren, vanaf 0:00 uur.

De bewegingsvergelijkingen van het eindpunt van de grote wijzer zijn:
$x = 3\sin 2\pi t,\ \ y = 3\cos 2\pi t.$
De bewegingsvergelijkingen van het eindpunt van de kleine wijzer zijn:
$x = 2\sin \frac{1}{6}\pi t,\ \ y = 2\cos \frac{1}{6}\pi t.$

5p **13** ☐ Teken in één figuur op ware grootte de banen van de eindpunten van de wijzers en geef daarin de wijzers aan op het tijdstip $t = 1{,}3$. Licht je werkwijze toe.

Op het tijdstip $t = 0$ liggen de wijzers over elkaar heen.

4p **14** ☐ Bereken het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop dit weer het geval is.

De (rechtstreekse) afstand tussen de eindpunten van de wijzers verandert voortdurend.

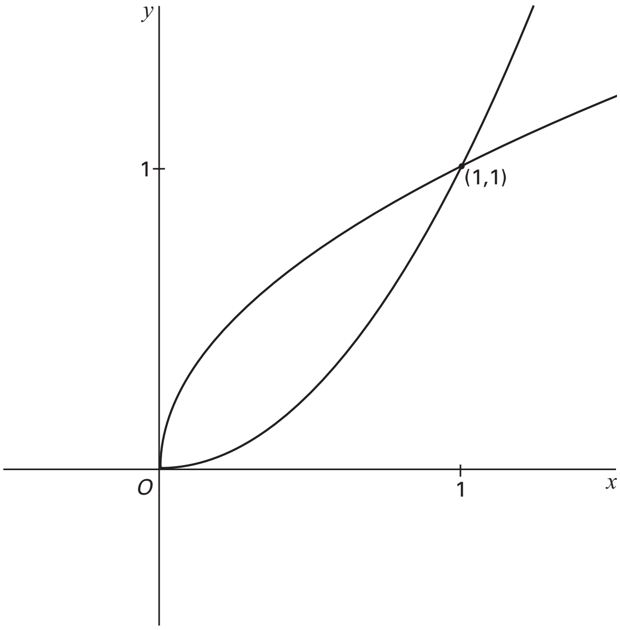
6p **15** ☐ Toon aan dat deze afstand op tijdstip t gelijk is aan $\sqrt{13 - 12\cos \frac{11}{6}\pi t}$.

4p **16** ☐ Bereken het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop de eindpunten van de wijzers, samen met de oorsprong, een gelijkbenige driehoek vormen.

Twee halve parabolen

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$, beide met domein $[0, \rightarrow\rangle$. Zie figuur 2.

figuur 2

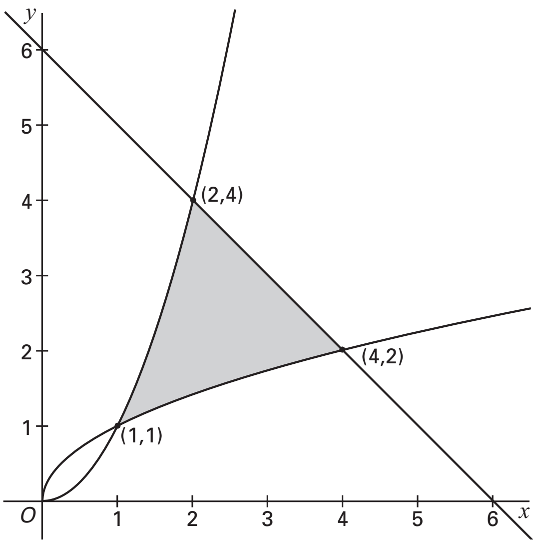


De lijn $x = p$, met $0 < p < 1$, snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.

7p **17** ☐ Bereken de exacte waarde van p waarvoor de lengte van het lijnstuk AB maximaal is.

In figuur 3 zijn de grafieken van f en g en ook de lijn $y = 6 - x$ getekend. Het gebied ingesloten door de grafiek van f, de grafiek van g en de lijn $y = 6 - x$, is in de figuur grijs gekleurd.

figuur 3



7p **18** ☐ Bereken algebraïsch de exacte oppervlakte van dit gebied.

Einde